Minimización del Value-at-Risk Condicional (CVaR): El Caso de las AFP's en Chile

Rafael Romero-Meza
Ingeniero Comercial, Universidad de Chile
Doctor of Business Administration Boston University
Profesor Asistente Universidad de Chile
rromero@negocios.uchile.cl
Tel: +56 (2) 9 78 33 78, Fax: +56 (2) 6 35 16 79
Sigifredo Laengle Scarlazetta
Ingeniero Civil, Universidad de Concepción
Magister Ingeniería Industrial, Universidad de Chile
Dr. Universität Konstanz (Germany)
Profesor Asistente Universidad de Chile
slaengle@sia.facea.uchile.cl
Tel.: +56 (2) 9 78 35 97, Fax: +56 (2) 6 35 16 79

Resumen

El presente trabajo es una continuación del artículo *Medidas de Riesgo Financiero* aparecida en la edición No. 149 de esta revista. Este se basa en un trabajo de los mismos autores que contiene detalles de los aspectos técnicos, y que fue presentado en la conferencia internacional de CLADEA 2005 organizada por la Facultad de Economía y Negocios de la Universidad de Chile.

El objetivo del presente artículo es describir y optimizar una nueva medida de riesgo, Conditional Value-at-Risk (CVaR), que es superior a la medida Value-at-Risk (VaR). La minimización del CVaR es implementada para el portafolio de una AFP promedio. Nuestros resultados indican que el portafolio de una AFP promedio es ineficiente incluso después de controlar por restricciones cuantitativas a la inversión.

1. Las Medidas de Riesgo y sus Problemas

Value-at-Risk (VaR) es una medida de riesgo muy popular que ha alcanzado un alto *status* entre los agentes reguladores. Sin embargo, el cálculo del VaR es difícil de optimizar y el resultado es inestable cuando la distribución de probabilidades de la función a maximizar no está distribuida como normal. La no normalidad es bastante probable de esperar, puesto que las pérdidas tienden a mostrar valores discretos y *fat tails*. Desde el punto de vista teórico, VaR no es una medida coherente de riesgo como lo indican Artzner et. al. ([2], 1999).

Se ha formulado una medida alternativa para calcular el riesgo llamada *Conditional Value-at-Risk* (CVaR). En términos simples, se puede definir CVaR como la pérdida promedio condicional a que se exceda al VaR. Esta medida es superior respecto de VaR en varios aspectos. En primer lugar, CVaR es una medida coherente de riesgo. Bajo esta medida, el riesgo de dos o más activos es menor que la suma de los riesgos individuales. En segundo lugar, CVaR es una medida de riesgo más estable al tomar en cuenta la distribución de pérdidas más allá de VaR, es decir los *fat tails*. Como se establece en Rockafellar et al. ([7], 2000), la optimización de CVaR coincide con la obtención de un VaR pequeño. Esta optimización del CVaR es equivalente a la obtención de un portafolio de varianza mínima de Markowitz ([6], 1952) si las distribuciones de los riesgos son normales. Del mismo modo, si las distribuciones son normales, la minimización del CVaR arroja también la del VaR mínimo.

El objetivo de este trabajo es estudiar la eficiencia del portafolio promedio del Fondo C de las *Administradoras de Fondos de Pensiones* (AFPs) chilenas entre el 2 de octubre de 2002 y el 31 de marzo de 2005, según el criterio de riesgo del CVaR. De los cinco fondos que administran las AFPs, hemos elegido el Fondo C debido a que es el más antiguo y el que contiene el mayor volumen de recursos. Consideramos que es importante estudiar la eficiencia del portafolio de las AFP's debido a que las AFPs son los inversionistas institucionales más importantes en Chile. Fueron creadas en 1981 y han servido de modelo a diversas reformas previsionales en América Latina y Europa. También, este modelo de previsión está presente como una alternativa en la discusión de reformas previsionales en Estados Unidos.

Debido a que las AFPs en Chile están sujetas a una serie de restricciones cuantitativas (límites de inversiones) impuestas por el agente regulador, es razonable esperar que el portafolio promedio efectivo durante ese periodo tenga un riesgo mayor que el que se podría obtener libre de estas restricciones. Por otra parte, según es explicado en Romero-Meza ([9], 2000), las AFPs enfrentan restricciones adicionales como la garantía de retorno mínimo, por lo que pueden reducir el costo de tal garantía manteniendo portafolios similares unas a otras. Esto se debe a que la garantía de retorno mínimo opera sobre un promedio de las rentabilidades históricas de todas las firmas que forman la industria. En base a estos antecedentes, nuestra *hipótesis* de trabajo es que el portafolio de la AFP promedio está lejos de aquella frontera eficiente que considera las restricciones cuantitativas o límites de inversión.

Encontrar el portafolio de óptimo CVaR para una cartera de activos riesgosos, requiere de técnicas de programación estocástica que derivan normalmente en algoritmos de programación matemática de gran escala. La técnica que usamos en este artículo fue desarrollada por T. Rockafellar y S. Uryasev ([7], 2000) para funciones de pérdida continuas. Los mismos autores extendieron el método a funciones discontinuas ([8], 2002). En tales artículos se demostró la efectividad numérica de la técnica. Por ejemplo, Krokhmal et al. ([5], 2002) ha seguido desarrollado esta técnica para minimizar CVaR sujeto a restricciones sobre el retorno esperado o bien la maximización del retorno esperado sujeto restricciones sobre el CVaR.

La gran popularidad de VaR es atribuible a su relativa simpleza de cálculo y facilidad de interpretación. Sin embargo, Artzner et al. ([2], 1999) plantea problemas conceptuales de esta medida. Supongamos que el propósito de la medida de riesgo es definir el capital requerido para realizar una cierta actividad. Una característica razonable de una *buena* medida de riesgo es *subaditividad*, esto es, la medida de riesgo para dos actividades combinadas debería ser menor que la suma de las dos actividades por separado. Supongamos que $\rho(X)$ es la medida de riesgo asociada con la actividad X, la que define el monto de capital requerido. Entonces ρ es subaditiva si para dos actividades X e Y se cumple que

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Al combinar las actividades, se espera que el riesgo se *diversifique*, es decir el capital requerido debería ser menor en el caso en que ambas actividades se combinen en comparación a si ambas actividades están separadas. Por lo tanto, si los requerimientos de capital son impuestos usando una medida de riesgo que no es subaditiva, las empresas podrían reducir el capital requerido sub-dividiendo sus actividades. En resumen, la crítica fundamental que se hace a la medida de riesgo VaR es que no satisface el requisito de *sub-aditividad* que es satifecho por la medida CVaR.

La siguiente sección plantea el modelo general de CVaR.

2. Un Modelo General de CVaR

Supongamos que x es **portafolio particular**[1]. Es esperable que el portafolio x tenga un comportamiento aleatorio. En particular la **pérdida de retorno** denotada por la función $f(x)$ es aleatoria porque no sólo depende de la decisión del portafolio x sino también de la «acción» de la naturaleza. Supongamos un portafolio cualquiera x y un nivel de probabilidad β (por ejemplo $5\,\%$). La probabilidad de que la pérdida del portafolio x exceda el nivel α se puede expresar así:

$$\mathsf{P}(f(x) \geq \alpha).$$

Se le llama **Value-at-Risk** del portafolio x a nivel de probabilidad β (lo denotamos por $\text{VaR}_\beta(x)$) al valor de la pérdida más pequeña tal que la probabilidad de esa pérdida sea igual o inferior a β, es decir

$$\text{VaR}_\beta(x) = \min_\alpha \left\{\alpha : \mathsf{P}(f(x) \geq \alpha) \leq \beta\right\}.$$

El valor de Value-at-Risk para un portafolio x y un nivel de probabilidad β se muestra en la siguiente figura 1.

El problema de encontrar el portafolio óptimo, $\overline{x}$, que minimice el VaR a un nivel de probabilidad β se puede formular entonces como sigue:

$$\text{VaR}_\beta(\overline{x}) = \min \left\{\text{VaR}_\beta(x) : x \in M_n\right\}.$$

Afortunadamente la comprensión de **Conditional Value-at-Risk** es relativamente simple si entendemos el concepto de VaR. Supongamos nuevamente un portafolio cualquiera x y un nivel de probabilidades β. CVaR se define como el valor esperado de la pérdida dado que la probabilidad de que esa pérdida supere a VaR sea menor o igual a β. Esto se puede expresar matemáticamente así:

$$\text{CVaR}_\beta(x) = \left\{\mathsf{E}f(x) : \mathsf{P}(f(x) \geq \text{VaR}_\beta(x)) \leq \beta\right\}.$$

Como en el caso de la optimización del VaR, el problema que debemos resolver es, dado un nivel de probabilidades β, encontrar el portafolio óptimo $\overline{x}$ tal que minimice el CVaR_β, es decir

$$\text{CVaR}_\beta(\overline{x}) = \min \left\{\text{CVaR}_\beta(x) : x \in M_n\right\}.$$

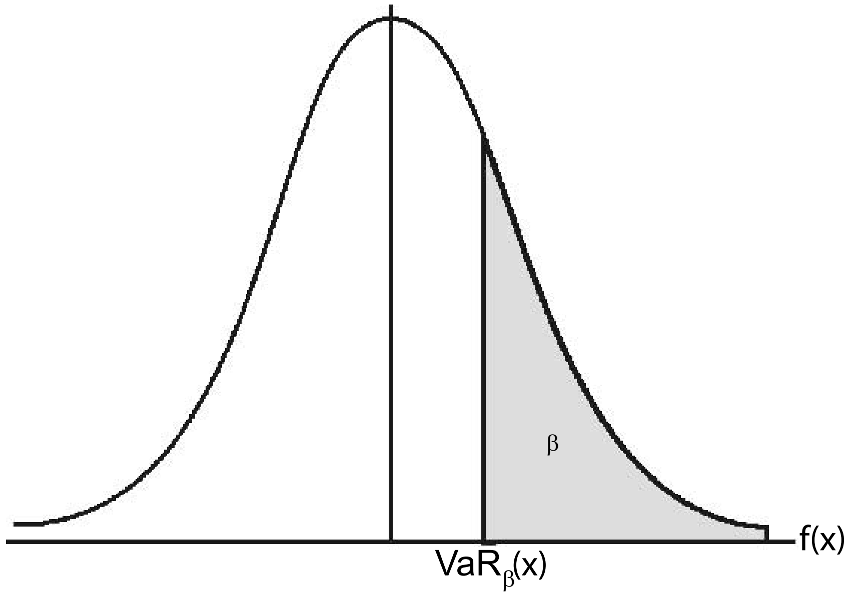

Figura 1: VaR(x) Value-at-risk

La figura 2 ilustra el concepto.

Para resolver este problema de optimización recurrimos a técnicas de programación estocástica que permiten modelar fenómenos de optimización con parámetros estocásticos. T. Rockafellar y S. Uryasev en ([7], 2000) y ([8], 2002) desarrollaron un método que resuelve el problema con técnicas de programación lineal, cuyos algoritmos de solución son relativamente simples de usar. Nosotros implementamos este modelo de manera computacional y lo resolvimos numéricamente.

3. Optimización de CVaR

En esta sección mostramos los resultados de aplicar la metodología de optimización de CVaR al portafolio promedio en que invierten las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP) de Chile para los fondos tipo C. Los datos estadísticos para construir el modelo son del período octubre de 2002 a marzo de 2005. La muestra consistió de trece vértices de riesgo, de los cuales ocho corresponden a renta fija y se muestran en la tabla 1.

El modelo de programación lineal se corrió en el software Mosek (ver `www.mosek.com`) con interface AMPL en un Pentium IV con Windows 32 bits. El modelo se corrió con un nivel de probabilidad β de $5\,\%$ y un tamaño de $20{,}000$ datos de pérdida. Tales datos se obtuvieron de la gen-

[1]Típicamente x toma la forma de un vector $(x_1, \ldots, x_n)^T$ cuando se trata de n portafolios disponibles. Al vector se le exige que $x_1 + \cdots + x_n = 1$ y $x_j \geq 1$ con $j = 1, \ldots, n$. Al conjunto de vectores no negativos cuyos elementos suman 1 lo denotamos por M_n.

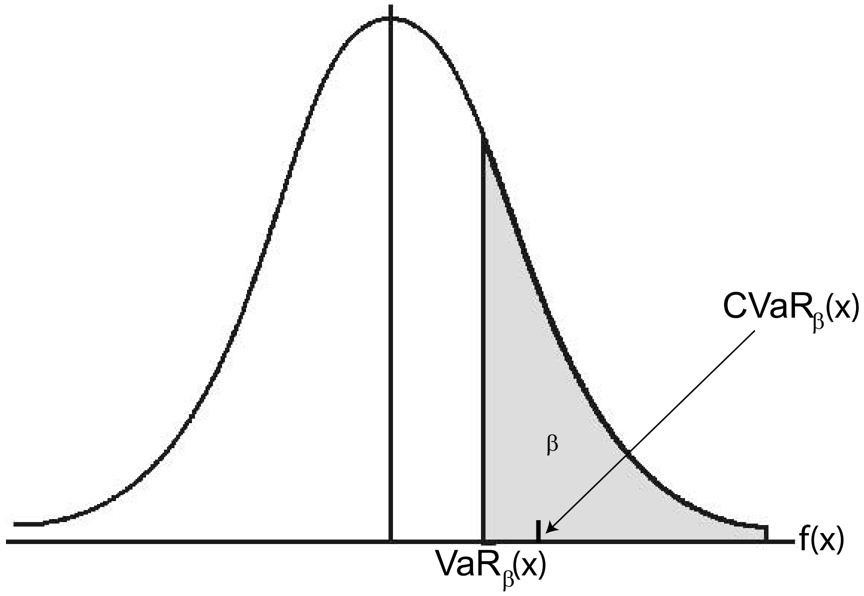

Figura 2: Conditional Value-at-Risk CVaR(x)

eración de números aleatorios *pseudorandoms* de una distribución multinormal obtenida de los datos de pérdida empíricos usando el software *Matlab*.

Dado que el propósito de este trabajo es aplicar la metodología de optimización de CVaR a un problema concreto, hemos estimado las varianzas y covarianzas incondicionales a pesar de que tales estimaciones pueden ser inconsistentes. Los retornos medios y matriz de varianzas covarianzas se encuentra en la tabla 3.

Para una discusión sobre consistencia en la estimación de varianzas de portafolios en mercados emergentes ver Aranda et al. ([1], 2005).

La figura 3 muestra fronteras eficientes para dos casos: (1) cuando se han impuesto las restricciones a la inversión por parte del organismo regulador, y (2) cuando se han levantado tales restricciones. Además se muestra en el mismo gráfico el portafolio promedio actual de todas las AFPs que conforman la industria para el Fondo C. Como era de esperarse, la frontera sin restricciones está por sobre aquella con restricciones. Esto denota el costo en eficiencia del conjunto de restricciones cuantitativas o de límite a las inversiones. Esto es consistente con la cuantificación de los costos de los límites a la inversión realizada por Berstein y Chumacero ([3], 2006) para el sistema chileno de fondos de pensión.

Este trabajo muestra que el portafolio promedio del fondo C es altamente ineficiente aún cuando consideremos las restricciones a la inversión. Como podemos ver en la tabla 3, el portafolio promedio actual, representado por el punto interior a ambas fronteras de eficiencia. Por lo tanto, el VaR del portafolio promedio se podría reducir sin afectar la rentabilidad. Alternativamente, también es posible mantener constante el

Descripción	**Portafolio Actual**	**Portafolio Óptimo Sin Restricción**	**Portafolio Óptimo Con Restricción**
x_1, Renta fija Gobierno (Peso)	0,00560768	0,24901400	0,25577800
x_2, Renta fija Gobierno (UF)	0,17417018	0,11847000	0,12106800
x_3, Renta Fija Gobierno (Dólar)	0,01534158	0,00000000	0,00000000
x_4, Renta Fija Corporativa	0,39227403	0,41181700	0,40000000
x_5, Renta Variable Nacional	0,16553604	0,19286900	0,19498600
x_6, Renta Fija USA	0,00383613	0,00000000	0,00000000
x_7, Renta Variable USA	0,14961517	0,00000000	0,00000000
x_8, Renta Fija Europa	0,01400986	0,02782990	0,02816810
x_9, Renta Variable Europa	0,06162213	0,00000000	0,00000000
x_{10}, Renta Fija U.K.	0,00010657	0,00000000	0,00000000
x_{11}, Renta Variable U.K	0,00275814	0,00000000	0,00000000
x_{12}, Renta Fija Asia	0,00013322	0,00000000	0,00000000
x_{13}, Renta Variable Asia	0,01498926	0,00000000	0,00000000
VaR	0,00437268	0,00206995	0,00207066
VaR (MM $)	76.804	36.357	36.370
Retorno	0,000454159	0,000454159	0,000454159

Cuadro 1: Portafolios Actual y Óptimo con y sin Restricciones

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	1,000	0,037	−0,040	−0,057	−0,074	0,073	0,085
x_2		1,000	0,031	0,095	−0,046	0,020	0,026
x_3			1,000	0,131	−0,034	−0,577	0,313
x_4				1,000	−0,064	−0,029	−0,011
x_5					1,000	0,011	0,173
x_6						1,000	0,313
x_7							1,000

Cuadro 2: Tabla de Correlaciones de Vértices de Riesgo

riesgo aumentando la rentabilidad esperada del portafolio. Esta ineficiencia se debe probablemente a la presencia de regulaciones adicionales que afectan a las AFPs y que no son fácilmente incorporables en este modelo. La garantía de retorno mínimo, según discutido por Romero-Meza ([9]), puede estar afectando seriamente la eficiencia en la asignación de portafolio de las AFPs. Hay bastante consenso entre los observadores de esta industria que la elección de portafolio entre distintas AFPs son muy similares unas a otras. Por lo tanto, las condiciones competitivas de la industria no garantizan que las AFPs prioricen la eficiencia en su elección de portafolio.

Nuestros resultados deben ser vistos con precaución. Esta ineficiencia relativa se sustenta en la estabilidad de los parámetros estimados. De acuerdo a la tabla 1, la inversión en el exterior debería ser cercana a cero. Este resultado es contra intuitivo ya que se contrapone al principio

	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}
x_1	0,029	0,017	0,059	0,020	0,029	0,017
x_2	−0,041	0,006	0,035	0,070	−0,014	−0,076
x_3	0,351	0,134	0,360	0,180	0,395	0,141
x_4	−0,037	0,014	−0,093	0,207	−0,029	−0,022
x_5	−0,096	0,223	−0,057	0,484	−0,039	0,170
x_6	0,668	0,040	0,751	0,000	0,690	0,240
x_7	0,052	0,493	0,248	0,086	0,244	0,218
x_8	1,000	0,120	0,522	−0,064	0,677	0,251
x_9		1,000	0,004	0,682	0,143	0,258
x_{10}			1,000	0,400	0,549	0,125
x_{11}				1,000	0,133	0,152
x_{12}					1,000	0,441
x_{13}						1,000

Cuadro 3: Tabla de Correlaciones de Vértices de Riesgo

de diversificación. Posiblemente se debe a la inestabilidad de las monedas extranjeras respecto al peso chileno.

El modelo de optimización de CVaR implementado en este trabajo, puede ser aplicado para cualquier distribución de probabilidades. Dado que el objetivo del trabajo es hacer una implementación concreta del modelo de optimización de CVaR optamos por la simpleza en la generación de números aleatorios multivariados a partir de una distribución normal. Posibles extensiones son la optimización a través de CVaR del portafolio de las compañías de seguros en Chile las que están sujetas a una regulación por VaR (Superintendencia de Valores y Seguros ([4], 2002).

Anexo

El propósito de este anexo es detallar los principales pasos metodológicos para llevar a cabo la aplicación propuesta en este estudio. El objetivo es obtener un vector de ponderaciones (portafolio) que minimize la medida de riesgo VaR Condicional (CVaR) para una AFP representativa que opere un Fondo C. Luego de obtenido tal portafolio, comparamos con el VaR y CVaR efectivo dado por el portafolio promedio del sistema invertido en el Fondo C.

Por construcción, luego de obtenido un CVaR mínimo, obtendremos adicionalmente un VaR pequeño. El portafolio óptimo será obtenido corriendo un programa de Programación Lineal Estocástico sujeto a diversas restricciones, entre ellas de no negatividad de los ponderadores, $x_j \geq 0$, de que la suma de ellos sea uno, $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$, y de las restricciones cuantitativas a la inversión impuestas por la regulación (detalladas en Tabla del Anexo 1). Estas últimas restricciones se traducen en $x_1 + x_2 + x_3 \leq 0,5$; $x_4 \leq 0,4$; $x_5 \leq 0,3$; $x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 0,3$.

Con el propósito de hacer manejable esta aplicación hemos definido 13

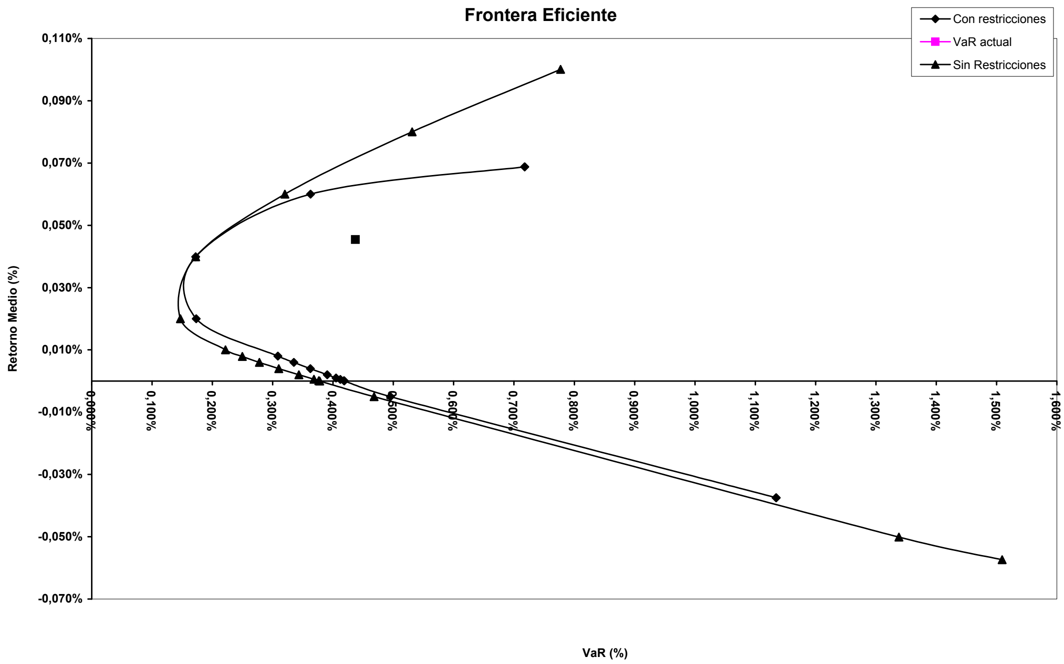

Figura 3: Fronteras Eficientes con y sin Restricciones Cuantitativas

vértices de riesgo. Cada uno de los tipos de inversiones ha sido asignado a alguno de estos vértices. En la Tabla del Anexo 2 se presentan los 13 vértices (desde x_1 a x_{13}): instrumentos de renta fija emitidos por el gobierno en pesos, UF y dólares, además incluímos instrumentos de renta fija y renta variable emitidos por empresas en pesos, dólares, euros, libras esterlinas y yen.

Luego de definidos los vértices de riesgo, necesitamos índices que describan su trayectoria. En la tercera columna de la Tabla del Anexo 2 se especifican los índices utilizados. Sobre la base de cada índice obtenemos la rentabilidad diaria, con datos que van desde octubre de 2002 a marzo de 2005, expresada en una moneda común, el peso chileno. Con las tasas de retorno diarias expresadas en pesos, calculamos el vector de retornos medios de cada vértice y la matríz de varianzas y covarianzas, las que nos servirán de base para generar muestras de 20.000 números aleatorios pseudorandoms de una distribución multi-normal utilizando Matlab.

Con estas muestras aleatorias aplicamos el modelo de programación lineal que se ejecutó con el software Mosek con interface AMPL. El modelo se corrió con un β de 95 %.

Instrumento	Límite Fondo C
Títulos emitidos por el Banco Central de Chile, Tesorería General de la República, bonos de reconocimiento emitidos por el instituto de Normalización Provisional y otros títulos emitidos o garantizados por el Estado de Chile	30 %
Depósitos a plazo, bonos y otros títulos emitidos pos instituciones financieras	50 %
Títulos garantizados por instituciones financieras	50 %
Letras de crédito emitidas por instituciones financieras	50 %
Bonos de empresas públicas y privadas	40 %
Acciones de Sociedades Anónimas abiertas	30 %
Acciones de Sociedades Anónimas inmobiliarias abiertas	30 %
Cuotas de Fondos Mutuos y de Inversión nacionales	30 %
Títulos de crédito, valores o efectos de comercio garantizados por Estados, Bancos Centrales o bancos extranjeros. Acciones, bonos de empresas y bancos extranjeros. Cuotas fondos mutuos y fondos de inversión extranjeros	30 %

Cuadro 4: Restricciones Cuantitativas por Regulación

Referencias

[1] Aranda, Rodrigo F., Bórquez C., Ricardo, and Romero-Meza, Rafael, *Consistent estimation of portfolio variance and the benefits of diversification. a cautionay note*, Facultad de Economía y Negocios, Universidad de Chile, CLADEA, 2005.

[2] Artzner, P., Dealbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D., *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance **9** (1999), 203–228.

[3] Bernstein, Solange M. and Chumacero, Rómulo A., *Quantifying the costs of investments limits for chilean pension funds*, Fiscal Studies **27** (2006), no. 1, 99–123.

[4] Superintencia de Valores y Seguros, *Norma de carácter general no. 148*, oct 2002.

[5] Krokhmal, P., Palmquist, J., and Uryasev, S., *Portfolio optimization with conditional value-at-risk criterion*, Journal of Risk **4** (Winter 2001-2002), no. 2, 43–68.

[6] H.M. Markowitz, *Portfolio selection*, Journal of Finance **7** (1952), no. 1, 77–91.

[7] Rockafellar, Tyrrel R. and Uryasev, Stanislav, *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk **2** (2000), no. 3, 21–41.

[8] ______, *Conditional value-at-risk for general loss distributions*, Journal of Banking and Finance **26** (2002), no. 7, 1443–1471.

[9] Rafael Romero-Meza, *An economic and financial analysis of the latin american model of pension intermediaries*, D.b.a. thesis, School of Management, Boston University, 2000.

Vértice de Riesgo	Activo Individual	
x_1, Renta Fija Gobierno Pesos	Bonos y Pagarés del Banco Central, Tesorería e INP	LVACLG Pesos
x_2, Renta Fija Gobierno UF	Bonos y Pagarés del Banco Central, Tesorería e INP	LVACLG UF
x_3, Renta Fija Gobierno Dólar	Bonos y Pagarés del Banco Central, Tesorería e INP	LVACLG Dólar
x_4, Renta Fija Empresas	Bonos de Empresas Públicas, Privadas e Instituciones Financieras. Depósitos a Plazo y Letras de Crédito de Instituciones Financieras en pesos	LVACLC
x_5, Renta Variable Nacional	Acciones de S.A. abiertas y de Inst. Financieras, Cuotas de fondos de inversión nacionales en pesos	IGPA
x_6, Renta Fija USA	Bonos y Títulos de crédito del Estado, Banco Central, empresas y entidades bancarias en dólares	MSCI: Eurodólar, Credit Index
x_7, Renta Variable USA	Acciones, cuotas de fondos mutuos y cuotas de fondos de inversión en dólares	S&P 500
x_8, Renta Fija Europa	Bonos y Títulos del Estado, Municipalidades, Banco Central, empresas y entidades bancarias. Emitidos en euro	MSCI: Euro, Credit Index
x_9, Renta Variable Europa	Acciones, cuotas de fondos mutuos y cuotas de fondos de inversión. Emitidos en euro	MSCI: EMU
x_{10}, Renta Fija U.K.	Bonos y Títulos del Estado, Municipalidades, Banco Central, empresas yentidades bancarias en libra esterlina	MSCI: Eurosterling, Credit Corporate I
x_{11}, Renta Variable U.K.	Acciones, cuotas de fondos mutuos y cuotas de fondos de inversión emitidos en libra esterlina	FTSE 100
x_{12}, Renta Fija Asia	Bonos y Títulos del Estado, municipalidades, Banco Central, empresas y entidades bancarias emitidos en yen	Lehman: Asian, Pacific Aggregate
x_{13}, Renta Variable Asia	Acciones, cuotas de fondos mutuos y cuotas de fondos de inversión emitidos en yen	NIKKEI 225

Cuadro 5: Definición de Vértices de Riesgo